7 Integralrechnung

. In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Integralrechnung, also der Umkehrung der Differentialrechnung beschäftigen.

Sie dient unter anderem der Berechnung von Flächen.

Entwickelt wurde die Integralrechnung von

Wissenschaftler 9:
Bernhard RIEMANN, deutscher Mathematiker
(17.09.1826 Breselenz bei Dannenberg (Elbe)
- 20.07.1866 Selasca bei Verbania am Lago Maggiore)

7.0.1 Motivation

. Wir stellen uns vor, dass Sie folgendes Grundstück kaufen wollen,

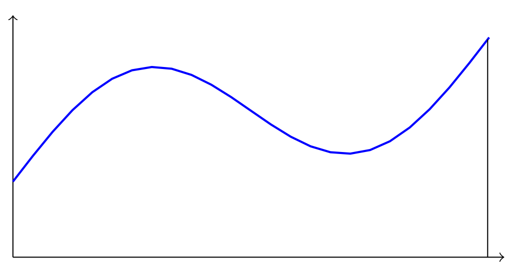

Abbildung 24: Grundstück

begrenzt von einer Funktion $f(x)$ über der x-Achse, zwischen den Grenzen a und b.

. Dazu ist es notwendig, dass wir die Größe, also den Flächeninhalt dieses Grundstücks bestimmen.

Unser Problem besteht nun darin, diesen zu berechnen, obwohl das Grundstück nicht mit elementaren Flächen wie *Rechteck, Dreieck, Parallelogramm, Trapez* oder aber *Kreis* oder *Ellipse* übereinstimmt, für die wir einfache Formeln für die Flächenberechnung kennen.

Daher kommen Sie auf den Gedanken, dem Verkäufer folgenden Vorschlag zu unterbreiten:

. Sie zahlen nur den Flächenanteil zwischen der x-Achse und der grünen Linie

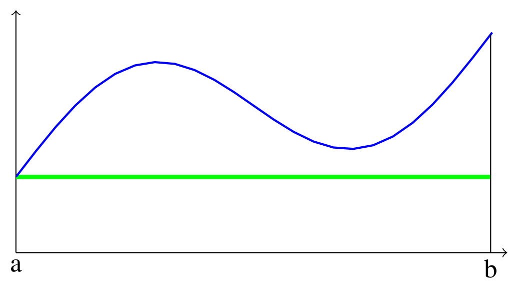

Abbildung 25: Grundstück mit unterer Begrenzung

und den darüber hinausgehenden Anteil erhalten Sie unentgeltlich als „Zugabe“.

Die Reaktion des Verkäufers können Sie sich sicherlich denken:

. Er wird Ihnen statt dessen anbieten, die Fläche zwischen der x-Achse und der roten Linie zu zahlen:

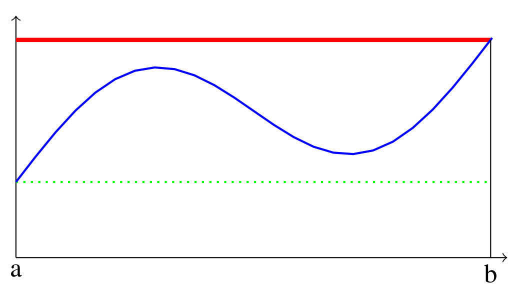

Abbildung 26: Grundstück mit unterer und oberer Begrenzung 1

also „etwas mehr“ verlangen, als Sie angeboten haben.

Sie werden darüber sicher begeistert sein. ☺

. Wir sprechen also von folgenden Flächeninhalten:

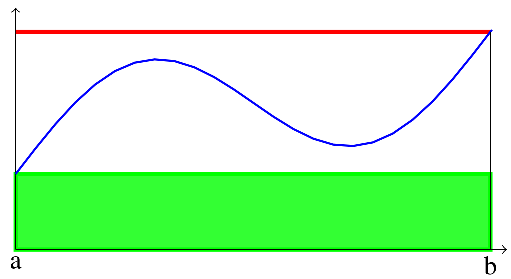

Abbildung 27: Grundstück mit unterbietender Fläche

Diese Fläche - Ihr Angebot - wollen wir U_1 nennen.

Offenbar gilt:

$$U_1 \leq \text{Fläche}$$

. Dem steht die vom Verkäufer geforderte Fläche gegenüber:

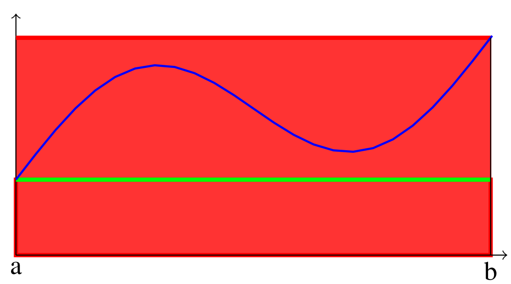

Abbildung 28: Grundstück mit überbietender Fläche

Diese Fläche - seine Forderung - wollen wir O_1 nennen.

Offenbar gilt:

$$\text{Fläche} \leq O_1$$

. Wenn wir beides zusammenfassen, erhalten wir folgende Situation:

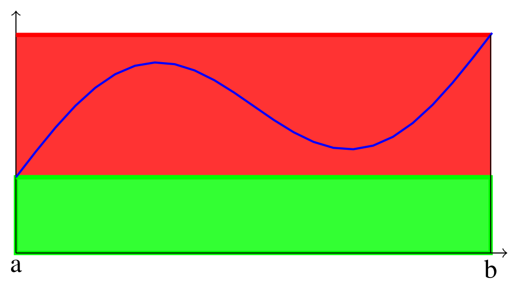

Abbildung 29: Grundstück mit Konsens- und Konfliktfläche 1

Offenbar gilt somit:

$$U_1 \leq \text{Fläche} \leq O_1$$

Wir haben nun eine (zu kleine) grüne „Konsens-“ und eine (zu große) rote „Konfliktfläche“.

. Unser Ziel ist es nun, die grüne „Konsensfläche“ zu vergrößern und gleichzeitig damit die rote „Konfliktfläche“ zu reduzieren.

Dieses versuchen wir, in dem wir das Intervall [a, b] in mehrere Teilintervalle zerlegen.

Die Teilintervalle müssen nicht gleich groß sein.

Auf jedem Teilintervall sind Sie bereit, bis zum kleinsten Funktionswert des Intervalls hochzugehen.

Im Gegenzug wird der Verkäufer auf jedem Teilintervall bis zum größten Funktionswert des Intervalls hinuntergehen.

. Damit erhalten wir nun folgende Angebotssituation:

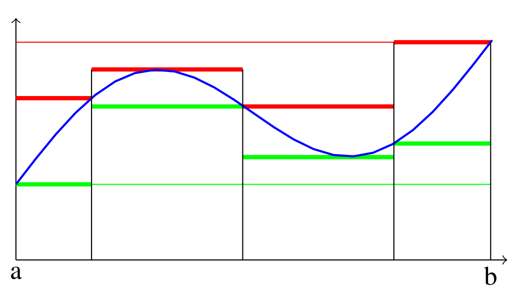

Abbildung 30: Grundstück mit unterer und oberer Begrenzung 2

Betrachten wir, was sich für die zugehörigen Flächen ergibt.

. Wir erhalten nun folgende Situation:

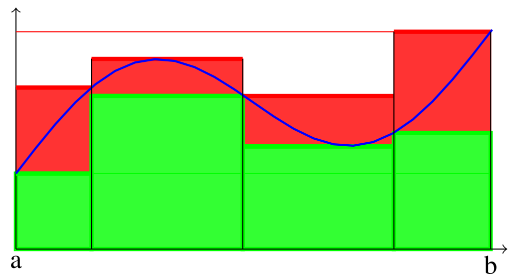

Abbildung 31: Grundstück mit Konsens- und Konfliktfläche 2

Ihre neue Angebotsfläche, also die Summe der grünen Rechtecke, heißt U_2, die neue Forderung des Verkäufers O_2.

Offenbar gilt somit:

$$U_1 \leq U_2 \leq \text{Fläche} \leq O_2 \leq O_1$$

. Unser Ziel, die grüne „Konsensfläche“ zu vergrößern und gleichzeitig damit die rote „Konfliktfläche“ zu reduzieren, ist zwar gelungen.

Mit dem bisherigen Resultat können wir aber noch nicht zufrieden sein.

Wir werden daher den Prozess der weiteren Unterteilung der Intervalle wiederholen.

. Damit erhalten wir nun folgende veränderte Angebotssituation:

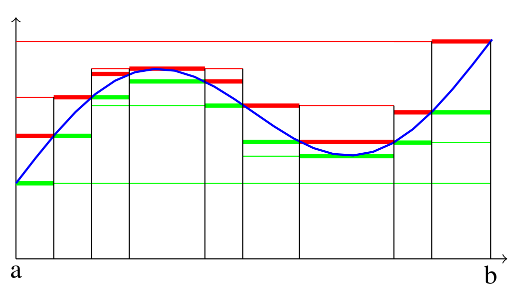

Abbildung 32: Grundstück mit unterer und oberer Begrenzung 3

Betrachten wir, was sich für die zugehörigen Flächen ergibt.

. Wir erhalten nun folgende verbesserte Situation:

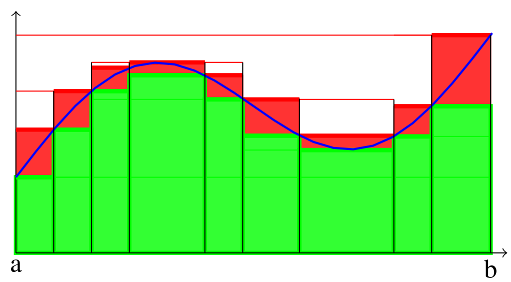

Abbildung 33: Grundstück mit Konsens- und Konfliktfläche 3

Ihre neue Angebotsfläche heißt jetzt U_3, die neue Forderung des Verkäufers O_3.

Daher haben wir

$$U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq \text{Fläche} \leq O_3 \leq O_2 \leq O_1$$

. Diesen Prozess der immer feineren Unterteilung der Intervalle müssen wir also unendlich oft wiederholen, um eine beide Seiten befriedigende Lösung zu erhalten.

Dieses führt zu:

7.1 Rechtecksummen

Definition 7.1. Wir bezeichnen mit
U_n die Summe der unteren Rechteckflächen

O_n die Summe der oberen Rechteckflächen,
(wie in den Skizzen).

7.2 Integral

Definition 7.2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ eine beschränkte Funktion. Falls

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n\ ,$$

so heißt die Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar. Der gemeinsame Grenzwert wird dann mit dem Symbol

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

bezeichnet. Dieser Ausdruck heißt das bestimmte Integral von $f(x)$ über $[a,b]$. [16]

7.3 Stammfunktion

Definition 7.3. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ eine integrierbare Funktion.

Eine differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x)$ heißt eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$, wenn

$$F'(x) = f(x).$$

7.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Theorem 7.4. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ eine integrierbare Funktion und sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

[17]

[16] Der Begriff *Integral* erscheint 1690 erstmals bei Jacob BERNOULLI (1654-1705). Allerdings macht auch sein Bruder Johann BERNOULLI (1667-1748) geltend, diesen Begriff eingeführt zu haben.

[17] Der Erste, der den Hauptsatz publizierte, war 1667 James GREGORY (1638-1675). Seine heutige Form erhielt der Satz durch Augustin Louis CAUCHY (1789-1857) im Jahre 1823.

7.5 Erinnerung: Elementare Ableitungsfunktionen

Satz 7.5. *Wir erinnern uns an die Ableitungsfunktionen 6.5:*

Diese werden wir jetzt in die Integralrechnung übertragen.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x) + C, C \in \mathbb{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$, $\boxed{n \neq -1}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$ln(x)$
e^x	e^x	e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$F(x)$	$f(x)$		

Tabelle 17: Erinnerung an Ableitungen elementarer Funktionen

7.6 Stammfunktionen Trigonometrie

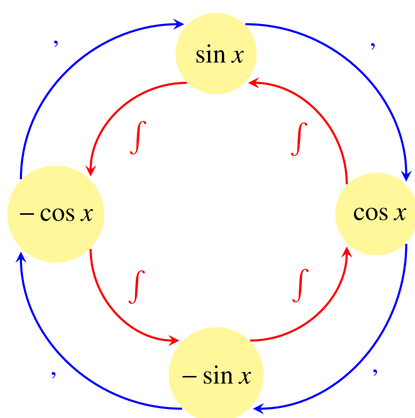

Abbildung 34: Stammfunktion Sinus - Cosinus

7.7 Erinnerung: Ableitungsregeln

Satz 7.7. *Wir erinnern uns an die Ableitungsregeln 6.4:*

(i) <u>*Summenregel:*</u> $$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

(ii) <u>*Faktorregel:*</u> $$\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x)$$

(iii) <u>*Produktregel:*</u> $$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(iv) <u>*Quotientenregel:*</u> $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

(v) <u>*Kettenregel:*</u> $$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Diese werden wir jetzt in die Integralrechnung übertragen.

7.8 Integrationsregeln - Teil 1

Satz 7.8. *Seien $f\colon D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ und $g\colon D_g \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ zwei integrierbare Funktionen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) <u>*Summenregel:*</u> $$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) <u>*Faktorregel:*</u> $$\int_a^b \big(c \cdot f(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

7.9 Integrationsregeln - Teil 2

Satz 7.9. *Die folgenden Regeln gibt es nur in der Integralrechnung.*

Sei $f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ *eine integrierbare Funktion und sei* $c \in [a, b]$.

Dann gilt:

(i) *Additionsregel:*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) *Vertauschungsregel:*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (-1) \cdot \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

(iii) *Spezialfall:*
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

7.9.1 Umformung der Produktregel

. Wir werden nun die Produktregel in ihre zugehörige Integrationsregel umformen.

Die Produktregel lautet:

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \big(f(x) \cdot g(x)\big)'$$

Durch Integration beider Seiten folgt:

$$\int_a^b \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x) \cdot g(x)\right)' \,\mathrm{d}x$$

Nach der Summenregel 7.8 (i) folgt:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x) \cdot g(x)\right)' \,\mathrm{d}x$$

Da sich Integration und Differentiation aufheben, folgt:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_a^b$$

Durch Subtraktion eines der Integrale erhalten wir folgende Regel:

7.10 Regel der partiellen Integration

Satz 7.10. *Seien $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ und $g\colon D_g \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$ zwei integrierbare Funktionen. Dann gilt:* [18]

(i) <u>*Variante 1:*</u>

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) <u>*Variante 2:*</u>

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

7.10.1 Beispiel zur partiellen Integration

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot sin(x)\,\mathrm{d}x$.

<u>Erster Versuch:</u>

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{sin(x)}_{g}\,\mathrm{d}x = \Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f} \cdot \underbrace{sin(x)}_{g}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f} \cdot \underbrace{cos(x)}_{g'}\,\mathrm{d}x$$

Dies alles ist völlig korrekt, aber das rechte Integral ist „schwieriger“ zu berechnen als das Ausgangsintegral.

Daher brechen wir an dieser Stelle ab und starten einen neuen Versuch.

[18]Der Begriff *partielle Integration* erscheint 1828 bei George WALKER (1734-1807).

Zweiter Versuch:

$$\int\limits_0^{\pi} \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{sin(x)}_{g'} \,\mathrm{d}x = \Big[\underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{(-cos(x))}_{g} \Big]_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{(-cos(x))}_{g} \,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[x \cdot (-cos(x))\Big]_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} (-cos(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[x \cdot (-cos(x))\Big]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[x \cdot (-cos(x))\Big]_0^{\pi} + \Big[sin(x)\Big]_0^{\pi}$$

$$= \big[\pi \cdot (-cos(\pi)) - 0 \cdot (-cos(0))\big] + \big[sin(\pi) - sin(0)\big] \text{ [-0.005cm]}$$

$$= \pi \cdot (-(-1)) - 0 + 0 - 0 = \pi$$

7.10.2 Umkehrung der Quotientenregel

Es gibt natürlich formal auch eine der Quotientenregel entsprechende Regel in der Integralrechnung.

Jedoch hat sie keinen praktischen Nutzen.

Daher wird sie auch in der Literatur nicht aufgeführt.

Wir wenden uns daher der letzten Ableitungsregel, also der Kettenregel zu.

7.10.3 Umkehrung der Kettenregel

Die Umkehrung der Kettenregel ist die *Substitutionsregel* [19] .

In ihrer allgemeinen Darstellung sind die entstehenden Formeln unschön und nicht sehr anwenderfreundlich.

Daher werden wir sie nur am Beispiel erläutern und die grundlegenden Schritte notieren.

[19] Der Begriff *Integration durch Substitution* erscheint 1870 bei William Guy PECK.

7.10.4 Substitutionsregel

Wir wollen folgende Aufgabe behandeln:

Berechnen Sie $\boxed{\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x}$

Dazu müssen wir überlegen, ob eine der bekannten Regeln anwendbar ist.

Formen wir das Integral um, so erhalten wir

$$\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

und erkennen, dass hier eine Substitution $z = 5x + 1$ hilfreich sein kann.

$$\boxed{\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}$$

Halten wir fest:

1. Substitution: $z = 5x + 1$

Das führt zu folgendem Zwischenergebnis

$$\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad \int z^{\frac{1}{2}}$$

Als nächsten Schritt müssen wir das Differential dx umrechnen.

$$\boxed{\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \;\rightarrow\; \int z^{\frac{1}{2}}}$$

Das Differential erhalten wir durch Ableitung der Substitutionsfunktion:

1. Substitution: $z = 5x + 1$

2. Differential: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 5 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}z$

Das führt zu folgendem Zwischenergebnis

$$\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \;\rightarrow\; \int z^{\frac{1}{2}}\;\frac{1}{5}\,\mathrm{d}z$$

Nun müssen wir noch die Grenzen substituieren.

$$\boxed{\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \;\rightarrow\; \int z^{\frac{1}{2}}\;\frac{1}{5}\,\mathrm{d}z}$$

Die neuen Grenzen erhalten wir durch Einsetzen der alten in z:

1. Substitution: $z = 5x + 1$

3. Grenzen: $z(3) = 5 \cdot 3 + 1 = 16 \quad , \quad z(0) = 5 \cdot 0 + 1 = 1$

Das führt zu folgendem Zwischenergebnis

$$\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^{16} z^{\frac{1}{2}}\;\frac{1}{5}\,\mathrm{d}z$$

Dieses Integral muss nun noch gelöst werden.

$$\boxed{\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (5x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{16} z^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{5}\,\mathrm{d}z}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\int_1^{16} z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{16} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[z^{\frac{3}{2}}\right]_1^{16} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[16^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[(\sqrt{16})^3 - 1\right] = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[4^3 - 1\right] = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 63 = \frac{1}{5}\cdot 2\cdot 21 = \frac{42}{5}$$

$$= 8{,}4$$

7.11 Substitutionsregel

Satz 7.11. *Vorgehensweise bei der Substitutionsregel:*

1. *Substitution*
2. *Umrechnung des Differential*
3. *Umrechnen der Grenzen*

Lösen des umgewandelten Integrals.

7.12 Uneigentliche Integrale

Definition 7.12. Für eine stetige Funktion f heißen - sofern sie existieren - die Grenzwerte

(i) $$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und}$$

(ii) $$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

das uneigentliche Integral von f über $[a,\infty[$ bzw. über $]-\infty,b]$.

7.12.1 Beispiele für uneigentliche Integrale

Beispiel 1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\underbrace{\left(-\frac{1}{b}\right)}_{\to\,0} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = 1$$

Beispiel 2

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2\cdot x^2}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\underbrace{\left(-\frac{1}{2\cdot b^2}\right)}_{\to\,0} - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Beispiel 3

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^0}{0}\right]_1^b$$

FEHLER !

Tappen Sie bitte nicht in diese Falle ! ☺

Richtige Lösung:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(x)\Big]_1^b = \lim_{b\to\infty} \Big[\underbrace{\ln(b)}_{\to\,\infty} - \ln(1)\Big] \quad \text{existiert nicht!}$$

7.12.2 Einige spezielle Integrale

Wir wollen nun einige spezielle Integrale berechnen.

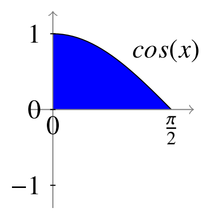

Abbildung 35: Integral Cosinus von 0 bis $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

Der blaue Flächeninhalt beträgt also 1 [FE].

Nun eine elementargeometrische Betrachtung:

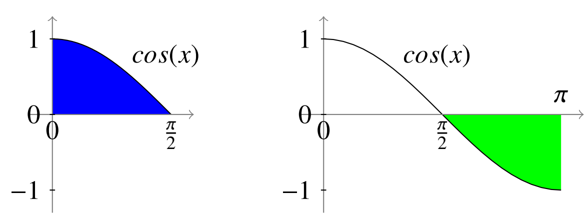

Abbildung 36: Integral Cosinus von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von $\frac{\pi}{2}$ bis π

Die beiden Flächenstücke sind kongruent, besitzen also jeweils den gleichen Flächeninhalt 1 [FE].

Daher folgt:

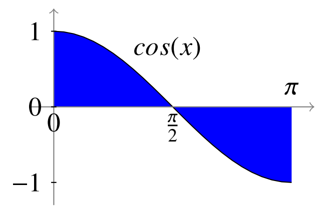

Abbildung 37: Integral Cosinus von 0 bis π

Der Flächeninhalt beträgt also 2 [FE].

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi} \;=\; \sin(\pi) - \sin(0) \;=\; 0 - 0 \;=\; 0$$

Der blaue Flächeninhalt beträgt 2 [FE], das Integral ist jedoch 0 ?

Es kommt aber noch schlimmer !

Noch eine elementargeometrische Betrachtung:

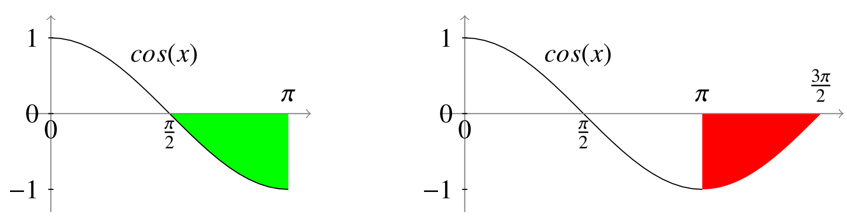

Abbildung 38: Integral Cosinus von $\frac{\pi}{2}$ bis π und von π bis $\frac{3\pi}{2}$

Auch diese beiden Flächenstücke sind kongruent, besitzen also jeweils den gleichen Flächeninhalt 1 [FE].

Daher folgt:

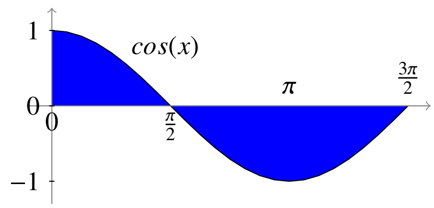

Abbildung 39: Integral Cosinus von 0 bis $\frac{3\pi}{2}$

Der Flächeninhalt beträgt 3 [FE].

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\sin(x)\Big]_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \;=\; \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) - \sin(0) \;=\; -1 - 0 \;=\; -1$$

Der Flächeninhalt beträgt 3 [FE], aber das Integral ist negativ ?

7.13 Unterschied zwischen Fläche und Integral

Satz 7.13. *Wir stellen fest:*

$$\boxed{\textit{Integral} \neq \textit{Fläche}}$$

(i) Flächenstücke $\left\{\begin{array}{c}\textit{oberhalb}\\ \textit{unterhalb}\end{array}\right\}$ *der x-Achse erhalten eine* $\left\{\begin{array}{c}\textit{positive}\\ \textit{negative}\end{array}\right\}$ *Flächenmaßzahl.*

(ii) Nur bei Flächen, die oberhalb der x-Achse liegen, stimmen die Begriffe „Flächeninhalt“ und „Integral“ überein.

(iii) Flächenstücke, die unterhalb der x-Achse liegen, muss man bei der Flächenberechnung betragsweise betrachten.

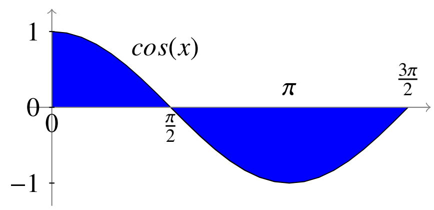

Abbildung 40: Fläche Cosinus von 0 bis $\frac{3\pi}{2}$

$$F = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| \Big[\sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| =$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right| + \left|\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |1-0| + |-1-1| = 1 + 2 = 3$$

Jetzt haben wir den korrekten Flächeninhalt ermittelt.